

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$ ，则 $M \cap N =$

- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$

2. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$ ，则 $z - \bar{z} =$

- A. $-i$ B. i C. 0 D. 1

3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$ ， $\mathbf{b} = (1, -1)$ 。若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})$ ，则

- A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$

4. 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

5. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ ， $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 。若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$ ，则 $a =$

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

6. 过 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α ，则 $\sin \alpha =$

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$

- A. $\frac{7}{9}$
- B. $\frac{1}{9}$
- C. $-\frac{1}{9}$
- D. $-\frac{7}{9}$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 选对但不全得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 , 其中 x_1 是最小值, x_6 是最大值, 则

- A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的平均数
- B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数
- C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 x_1, x_2, \dots, x_6 的标准差
- D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的极差

10. 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{P}{P_0}$,

其中常数 $p_0 (p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60 ~ 90
混合动力汽车	10	50 ~ 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车, 混合动力汽车, 电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3 , 则

- A. $p_1 \geq p_2$
- B. $p_2 > 10p_3$
- C. $p_3 = 100p_0$
- D. $p_1 \leq 100p_2$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则

- A. $f(0) = 0$
- B. $f(1) = 0$
- C. $f(x)$ 是偶函数
- D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12. 下列物体中，能被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有
- 直径为 0.99 m 的球体
 - 所有棱长均为 1.4 m 的四面体
 - 底面直径为 0.01 m，高为 1.8 m 的圆柱体
 - 底面直径为 1.2 m，高位 0.01 m 的圆柱体

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有_____种（用数字作答）.
14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $A_1B_1=1$ ， $AA_1=\sqrt{2}$ ，则该棱台的体积为_____.
15. 已知函数 $f(x)=\cos \omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ ，有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是_____.
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上， $\overline{F_1A} \perp \overline{F_1B}$ ， $\overline{F_2A} = -\frac{2}{3}\overline{F_2B}$ ，则 C 的离心率为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中， $A+B=3C$ ， $2\sin(A-C)=\sin B$.

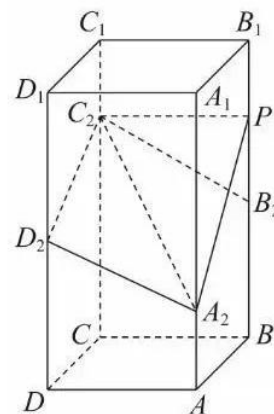
- 求 $\sin A$ ；
- 设 $AB=5$ ，求 AB 边上的高.

18. (12 分)

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $AA_1=4$.

点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上， $AA_2=1$ ， $BB_2=DD_2=2$ ， $CC_2=3$.

- 证明： $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ ；
- 点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时，求 B_2P .



19. (12分)

已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, 求证: $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

20. (12分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

21. (12分)

甲乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8, 由抽签决定第一次投篮的人选, 第一次投篮的人是甲, 乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$,

则 $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n q_i$. 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y , 求 $E(Y)$.

22. (12分)

在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.